Δ2/1 (55)

Διαδικασία γεννήσεων - θανάτων

Θεωρούμε μια σ.δ. σε συνεχή χρόνο $\{X(t): 0 < t < +\infty\}$ και με τιμές στον μη αρνητικό ημιάξονα των ακεραίων:

$\rightarrow P_{ij}(t) = P(X(u+t) = j \mid X(u) = i)$

Επιπλέον οι αλλαγές των καταστάσεων καθορίζονται από τους εξής κανόνες:

i) Δοθέντος ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) τη χρονική στιγμή t, η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση n+1 τη χρονική στιγμή t+dt (δηλ. να συμβεί μία γέννηση ακριβώς σε χρόνο dt) είναι ίση:

$P_{n,n+1}(dt) = \lambda_n dt + o(dt)$

λ_n: μια θετική παράμετρος (ρυθμός γεννήσεων) που εξαρτάται από το n

$o(dt)$: είναι όροι πολύ μικροί ως προς dt: $\lim_{dt \to 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$

ii) Δοθέντος ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n τη χρον. στιγμή t η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση n-1 τη χρον. στιγμή t+dt (δηλ. να συμβεί θάνατος ακριβώς σε t χρόνο) είναι ίση: $P_{n,n-1}(dt) = \mu_n dt + o(dt)$

μ_n: μία θετική παράμετρος (ρυθμός θανάτων) που εξαρτάται μόνο από το n

$o(dt)$: το ίδιο

iii) Δοθέντος ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n τη χρον. στιγμή t, η πιθανότητα ο συνολικός αριθμ. των γεννήσεων - θανάτων (γεγονότων) που θα πραγματοποιηθεί στο διάστημα (t, t+dt) να είναι μεγαλύτερη του 1 είναι $o(dt)$

$$P_{nn} = 1 - \left(\mu_n dt + o(dt) + \lambda_n dt + o(dt)\right) =$$
$$= 1 - (\mu_n + \lambda_n)dt + o(dt)$$

Έστω Poisson με ρυθμό λ στη μονάδα του χρόνου:

P(να συμβούν n το πλήθος γεγονότα σε t χρον. μονάδες)

$$= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

P(να συμβεί ένα γεγονός σε χρον. διάστημα dt) $= \dfrac{(\lambda dt)^1 e^{-\lambda dt}}{1!} =$

$$= \lambda dt \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda dt)^n}{n!} = \lambda dt \left[1 - \frac{\lambda dt}{1!} + \frac{(\lambda dt)^2}{2!} - \frac{(\lambda dt)^3}{3!} \cdots \right]$$

$$= \lambda dt \underbrace{- (\lambda dt)^2 + \frac{(\lambda dt)^3}{2!} - \frac{(\lambda dt)^4}{3!} \cdots}_{o(dt)} = \lambda dt + o(dt) \xrightarrow{dt \to 0} \lambda dt$$

<u>Ερώτημα</u>

Έστω ότι τη χρον. στιγμή 0, η κατάσταση της διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων είναι $X(0) = i$

Ζητώ την πιθανότητα: $P_{in}(t) = P[X(t) = n \mid X(0) = i] = P_n(t)$

$P_n(t+dt) =$ (
να έχει βρεθεί στην κατάσταση $n-1$ τη χρον. στιγμή t ενώ αρχικά ήταν στην $X(0)$ και από $n-1 \to n$

ή

να έχει βρεθεί στην κατάσταση $n+1$ τη χρον. στιγμή t ενώ αρχικά ήταν στην $X(0)$ και από $n+1 \to n$

ή

να έχει βρεθεί στην κατάσταση n τη χρον. στιγμή t ενώ αρχικά ήταν στην $X(0)$ και από $n \to n$

ή

να έχει βρεθεί στην κατάσταση j τη χρον. στιγμή t ενώ αρχικά ήταν $X(0)$ και $j \neq n-1, n+1$ και $j \to n$)

$= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$

$P(A_1) =$ (να βρεθεί στην κατάσταση $n-1$ τη χρον. στιγμή t ενώ ήταν στην $X(0)=i$ και από την $n-1 \to n$ σε χρόνο dt)

$= P_{n-1}(t) \cdot [\lambda_{n-1} dt + o(dt)]$

Όμοια $P(A_2) = P_{n+1}(t) \cdot [\mu_{n+1} dt + o(dt)]$

$P(A_3) = P_n(t) \cdot [1 - (\mu_n + \lambda_n) dt + o(dt)]$

$P(A_4) = P_j(t)\, o(dt)$

άρα $P_n(t+dt) = P_{n-1}(t) \cdot [\lambda_{n-1} dt + o(dt)] + P_{n+1}(t)[\mu_{n+1} dt + o(dt)]$
$+ P_n(t) \cdot [1 - (\lambda_n + \mu_n) dt + o(dt)] + P_j(t)\, o(dt)$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{P_n(t+dt) - P_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) \quad (1)$$ Διαφ. Εξίσωση

$$P_0(t+dt) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

- $P(B_1) = P\left(\begin{matrix}\text{να έχει βρεθεί τη χρ. στιγμή } t \text{ στην } 0 \text{ κατ.} \\ X(0)=i \text{ κ } 0 \to 0 \text{ σε χρόνο } dt\end{matrix}\right) = P_0(t)\left[1-\lambda_0 dt + o(dt)\right]$
- $P(B_2) = P\left(\begin{matrix}\text{να έχει βρεθεί τη χρ. στιγμή } t \text{ στο } 1 \text{ κατ.} \\ X(0)=i \text{ κ } 1 \to 0 \text{ σε χρόνο } dt\end{matrix}\right) = P_1(t)\left(\mu_1 dt + o(dt)\right)$
- $P(B_3) = P\left(\begin{matrix}\text{να έχει βρεθεί τη χρ. στιγμή } t \text{ στο } j \text{ κατ.} \\ X(0)=i \text{ κ } j \to 0 \text{ σε χρόνο } dt\end{matrix}\right) = P_j(t)\, o(dt)$

Άρα η (1) γίνεται:

$$\frac{P_0(t+dt) - P_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + P_1(t)\mu_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t)$$

Το σύστημα αυτό ~~όλων είναι~~ των διαφορικών εξισώσεων δεν λύνεται, με την πάροδο του χρόνου όμως το σύστημα που μελετάμε πέφτει σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας οπότε υπάρχουν οι οριακές πιθανότητες

$\bar{p}_n = \lim_{t\to\infty} p_n(t)$, $0 \le \bar{p}_n < 1$ με $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n = 1$

Επίσης ισχύει ότι $\lim_{t\to+\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} = 0$

από (1): $\lambda_0 \bar{p}_0 = \mu_1 \bar{p}_1$ και

$(\lambda_n + \mu_n)\bar{p}_n = \lambda_{n-1}\bar{p}_{n-1} + \mu_{n+1}\bar{p}_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\lambda_0 \bar{p}_0 = \mu_1 \bar{p}_1 \Rightarrow \bar{p}_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\bar{p}_0$$

$$(\lambda_1 + \mu_1)\bar{p}_1 = \lambda_0 \bar{p}_0 + \mu_2 \bar{p}_2 \xrightarrow{\bar{p}_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\bar{p}_0} \bar{p}_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\bar{p}_0$$

$$(\lambda_2 + \mu_2)\bar{p}_2 = \lambda_1 \bar{p}_1 + \mu_3 \bar{p}_3 \xrightarrow{\bar{p}_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\bar{p}_0} \bar{p}_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\bar{p}_0$$

$$\bar{p}_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}\bar{p}_0 \quad \text{όποτε:} \quad \bar{p}_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_n}\bar{p}_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bar{p}_n = 1 \Rightarrow \bar{p}_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1}\bar{p}_0 + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\bar{p}_0 + \ldots = 1 \Rightarrow$$

$$\bar{p}_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n}\right] = 1 \Rightarrow p_0 = \ldots$$

Ειδική Περίπτωση

Θεωρήστε ένα τηλεφωνικό κέντρο με m γραμμές. Η διάρκεια του τηλεφωνήματος ακολουθεί Εκθ(μ). Οι κλήσεις γίνονται βάσει της κατανομής Poisson(λ). Όταν ένας συνδρομητής βρίσκει όλες τις γραμμές κατειλημμένες,

Θέλουμε να προσδιοριστεί μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ποια η πιθανότητα κάποιος συνδρομητής να βρει όλες τις γραμμές κατειλημμένες με $\mu_n = n\mu$, $n \le m$

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & , n < m \\ 0 & , n = m \end{cases}$$

$$\bar{p}_m = \frac{\lambda^m}{m!\,\mu^m}\bar{p}_0 = \frac{(\lambda/\mu)^m}{m!}\bar{p}_0$$

και $\bar{p}_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right)^{-1}$

<u>Άσκηση 23</u>

Ο κ. Μπατσιάκης έχει 3 σκούφους. Όταν κάνει τη διαδρομή σπίτι → γραφείο και βρέχει ή χιονίζει είναι ίση με p και φοράει το σκουφάκι του. Αν στην επιστροφή (γραφείο → σπίτι) βρέχει ή χιονίζει (πιθανότητα p) φοράει σκουφάκι ή το ξεχνάει στο γραφείο και δεν το φοράει. Αν δεν βρέχει ή χιονίζει δεν παίρνει σκούφο.

$X_n : n = 1, 2, 3, \ldots$ παριστά τον αριθμό σκούφων στην αρχή της n-οστής διαδρομής.

Στοχ. διαδ. σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, 3\}$.

Έχουμε και την Μαρκοβιανή ιδιότητα.

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-p & p \\ 2 & 0 & 1-p & p & 0 \\ 3 & 1-p & p & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longleftrightarrow & 3 \\ & & \uparrow \\ 2 & \longleftrightarrow & 1 \end{array}$$

P(μετά από πολλές μέρες να μην υπάρχει κανένας σκούφος) $= \pi_0$

μη διαχωρίσιμη, πεπερ. πλ., απεριοδική άρα εργοδική (θετ. επαναλ. & απεριοδική)

από θ. Foster $X = XP$ και $\pi = cX$

πιθανότητα να βρέχεται είναι $\pi_0 p$